

## THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 7

**Exercice 1.** *À faire après chaque cours!*

Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

**Exercice 2.** (facile) Montrer qu'un sous-groupe normal  $H \trianglelefteq G$  est un sous-groupe normal maximal de  $G$  si et seulement si  $G/H$  est un groupe simple.

**Exercice 3.** (facile) Déterminer une série de composition pour  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . Lister et identifier chaque facteur de composition attaché à votre série de composition. La série de composition est-elle unique? Les facteurs de composition sont-ils uniques?

**Exercice 4.** (moyen) Le groupe  $A_4$  a-t-il une série de composition? Si oui, trouvez-en une et identifiez les facteurs de composition. Pouvez-vous en déduire une série de composition pour  $S_4$ ? Si oui, identifiez les facteurs de composition.

**Exercice 5.** (facile) Quels sont les facteurs de composition d'un produit semi-direct  $G \rtimes_{\varphi} H$  en termes des facteurs de composition de  $G$  et  $H$ ?

**Exercice 6.** (moyen)

- (1) Soit  $n$  un entier positif et soit  $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$  sa factorisation en nombres premiers. Trouver une série de composition pour  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Avec multiplicité, quels sont les facteurs de composition?
- (2) En supposant le théorème de Jordan-Hölder, prouvez que tout  $n \in \mathbb{N}$  peut être décomposé de manière unique comme produit de puissances de nombres premiers.

**Exercice 7.** (moyen) Trouver une série de composition pour  $D_{2n}$  et lister les facteurs de composition. Quelle est la longueur de la série de composition?

**Exercice 8.** (moyen) *Construction d'un groupe simple infini*

Soit

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \dots$$

une suite de groupes simples, alors montrer que

$$G := \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

1

est un groupe simple. En utilisant cela, donnez un exemple de groupe simple infini.

**Notation :** Soit  $G$  un groupe. Si  $G$  a une série de composition  $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$ , alors on note  $\text{longueur}(G) := n$ . Cela est bien défini par un théorème vu en cours.

Soit  $G$  un groupe. Une chaîne normale ascendante de  $G$  est une chaîne de sous-groupes de  $G$  du type

$$G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots$$

Les chaînes normales descendantes sont définies de la même manière, avec des inclusions inversées.

**Exercice 9.** (difficile) Soit  $G$  un groupe. Pour 1), 2) et 3) supposez que  $G$  ait une longueur finie.

- (1) Considérez une suite exacte courte

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow L \rightarrow 1$$

Prouvez que  $\text{longueur}(K), \text{longueur}(L) < +\infty$  et que

$$\text{longueur}(K) + \text{longueur}(L) = \text{longueur}(G).$$

- (2) Prouvez que si  $K \trianglelefteq G$  est un sous-groupe normal *propre*, alors

$$\text{longueur}(K) < \text{longueur}(G).$$

- (3) Prouvez que toutes les chaînes normales ascendantes et descendantes composées uniquement de sous-groupes normaux de  $G$  sont finies et que le nombre de sous-groupes distincts apparaissant dans une telle chaîne est au plus  $\text{longueur}(G) + 1$ .

- (4) Prouvez qu'un groupe  $G$  a une longueur finie si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- (a) Toute chaîne normale descendante commençant par un sous-groupe normal  $H$  de  $G$  se stabilise, c'est-à-dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G_i = G_n$  pour tout  $i \geq n$ .
- (b) Si  $H$  est un sous-groupe normal de  $G$ , alors toutes les chaînes normales ascendantes de  $H$  composées uniquement de sous-groupes normaux de  $H$  se stabilisent.